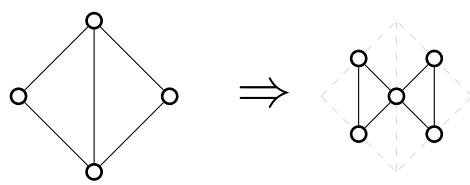
Exercice 1 : Un problème dans la preuve ?

Alice et Bob discutent de la NP-complétude du problème de coloration des arêtes d'un graphes. Pour rappel, une coloration propre des arêtes est une coloration où deux arêtes qui ont un sommet en commun ont une couleur différente.

Bob prétend avoir trouvé une preuve que la coloration d'arêtes est un problème NP-complet. Il sait que la coloration de sommets est NP-complet et il veut effectuer une réduction. La réduction qu'il propose est la suivante : Etant donné un graphe $G = (V, E)$ Bob crée un nouveau graphe G' dont les sommets correspondent aux arêtes de G et où deux sommets forment une arête si et seulement si les arêtes associées dans G ont un sommet en commun. Ainsi le graphe d'arrivée admet une coloration propre des sommets si et seulement si le graphe de départ admet une coloration propre des arêtes.



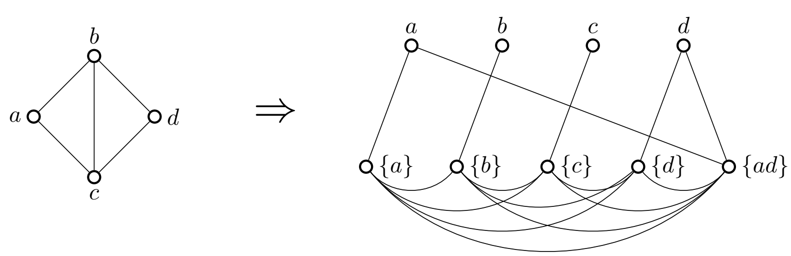
Alice dit qu'il y a un problème avec sa preuve. Qui a raison et pourquoi ?

Exercice 2 : Un problème dans la preuve 2, le retour !

Céline et Damien veulent résoudre le problème "P=NP ?" et empocher le million de dollar. Céline pense d'ailleurs avoir une preuve de P=NP. Elle veut faire une réduction de 3-COL à 3-Domination. Le problème 3-COL demande s'il est possible de colorer proprement un graphe avec 3 couleurs ou moins et 3-Domination consiste à trouver pour un graphe donné un ensemble dominant de taille 3, c'est-à-dire un ensemble de trois sommets tel que tous les sommets du graphe soit dans cet ensemble ou voisin d'un sommet de cet ensemble.

1. Prouver que 3-Domination est un problème dans P.

La réduction que propose Céline est la suivante : Etant donné une instance $G = (V, E)$ de 3-COL, Céline construit un graphe $G' = (V', E')$ où $V' = V \cup V_{stables}$ avec $V_{stables}$ l'ensemble de tous les stables de G. L'ensemble d'arêtes E' contient toutes les arêtes possibles entre deux sommets de $V_{stables}$ et aucune entre deux sommets de V. De plus, il y a une arête entre un sommet u de V et un sommet s de $V_{stables}$ si et seulement si u est un sommet du stable correspondant à s.



2. Prouver que G admet une 3-coloration si et seulement si G' admet un ensemble dominant de taille 3.

3. Malgré cette réduction, Damien doute qu'ils puissent prétendre au million, pourquoi ?

Exercice 3 : Un problème dans la preuve 3, les origines du mal...

Emille et Florence étudient le jeu Géographie. Ce jeu est joué par deux joueurs dans un graphe orienté. Initialement un pion est placé sur un sommet du graphe et à tour de rôle les deux joueurs déplacent le pion suivant un arc du graphe. Il est interdit de déplacer le pion sur un sommet qu'il a déjà visité. Si un joueur ne peut plus jouer, il a perdu.

Emille prétend que le problème consistant à savoir qui gagne entre le premier et le deuxième joueur est NP-complet. Il a en effet trouvé une réduction depuis le problème SAT. Florence doute fortement que ce problème soit NP-complet, pourtant la réduction d'Emille est correcte (vous pouvez éventuellement la demander à votre chargé de TD).

Quel peut donc être le problème ?

Exercice 4 : NP-complétude de Set Cover

Étant donné un ensemble E et un ensemble $S = \{S_1, ..., S_m\} \subset \mathcal{P}(E)$ de sous-ensembles de E, un *ensemble couvrant* $C = \{c_1, ..., c_k\}$ de (E, S) est un sous-ensemble de E tel que pour tout $i \in \{1, ..., m\}$ il existe $j \in \{1, ..., n\}$ tel que $c_j \in S_i$. Le problème Set Cover est le suivant :

Set Cover
Instance: Un ensemble d'éléments E, un ensemble S de sous-ensembles de E et un entier k
Question: Existe-t-il un ensemble couvrant de (E, S) de cardinal au plus k ?

Prouver que le problème Set Cover est NP-complet en utilisant une réduction depuis le problème 3-SAT. Indice : Si S contient un ensemble de cardinal 2 alors tout ensemble couvrant doit contenir au moins un des deux éléments de cet ensemble.