Nombre géodésique fort et produit cartésien

Valentin Gledel

Journées Graphes et Algorithmes

14 Novembre 2018

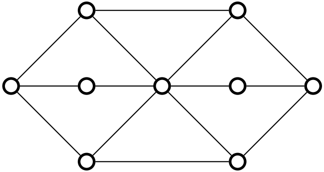
Avec Vesna Iršič et Sandi Klavžar, University of Ljubljana

Nombre géodésique

Harary, Loukakis et Tsouros, 1986

Ensemble géodésique

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$.
S est un ensemble géodésique de G si l'ensemble des plus courts chemins entre les sommets de S couvre tous les sommets de G.

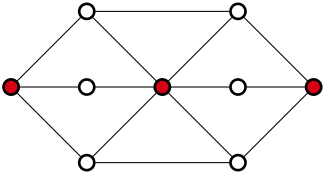


Nombre géodésique

Harary, Loukakis et Tsouros, 1986

Ensemble géodésique

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$.
S est un ensemble géodésique de G si l'ensemble des plus courts chemins entre les sommets de S couvre tous les sommets de G.

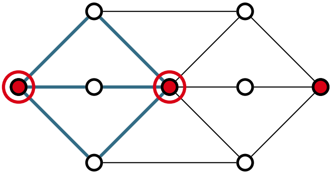


Nombre géodésique

Harary, Loukakis et Tsouros, 1986

Ensemble géodésique

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$.
S est un ensemble géodésique de G si l'ensemble des plus courts chemins entre les sommets de S couvre tous les sommets de G.

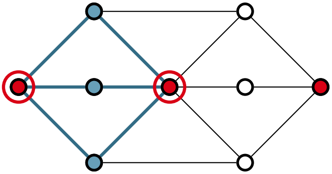


Nombre géodésique

Harary, Loukakis et Tsouros, 1986

Ensemble géodésique

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$.
S est un ensemble géodésique de G si l'ensemble des plus courts chemins entre les sommets de S couvre tous les sommets de G.

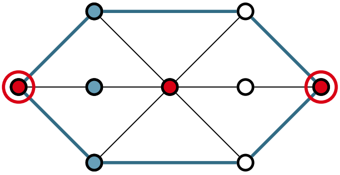


Nombre géodésique

Harary, Loukakis et Tsouros, 1986

Ensemble géodésique

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$.
S est un ensemble géodésique de G si l'ensemble des plus courts chemins entre les sommets de S couvre tous les sommets de G.

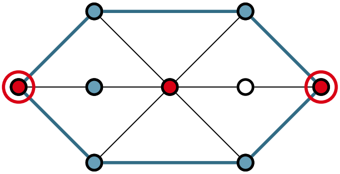


Nombre géodésique

Harary, Loukakis et Tsouros, 1986

Ensemble géodésique

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$.
S est un ensemble géodésique de G si l'ensemble des plus courts chemins entre les sommets de S couvre tous les sommets de G.

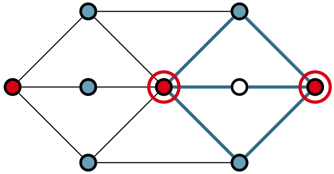


Nombre géodésique

Harary, Loukakis et Tsouros, 1986

Ensemble géodésique

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$.
S est un ensemble géodésique de G si l'ensemble des plus courts chemins entre les sommets de S couvre tous les sommets de G.

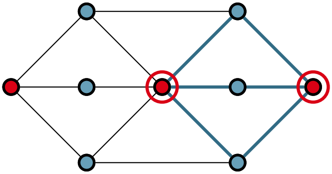


Nombre géodésique

Harary, Loukakis et Tsouros, 1986

Ensemble géodésique

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$.
S est un ensemble géodésique de G si l'ensemble des plus courts chemins entre les sommets de S couvre tous les sommets de G.

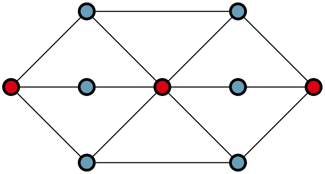


Nombre géodésique

Harary, Loukakis et Tsouros, 1986

Ensemble géodésique

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$.
S est un ensemble géodésique de G si l'ensemble des plus courts chemins entre les sommets de S couvre tous les sommets de G.



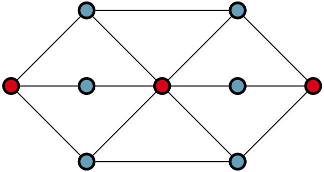
L'objectif est de trouver g(G), la taille du plus petit ensemble géodésique de G

Nombre géodésique

Harary, Loukakis et Tsouros, 1986

Ensemble géodésique

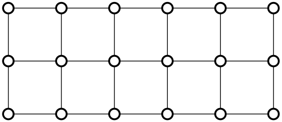
Soit $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$.
S est un ensemble géodésique de G si l'ensemble des plus courts chemins entre les sommets de S couvre tous les sommets de G.

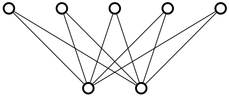


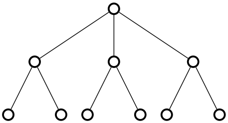
$\mathrm{g}(G) = 3$

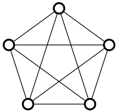
L'objectif est de trouver $\mathrm{g}(G)$, la taille du plus petit ensemble géodésique de G

Nombre géodésique

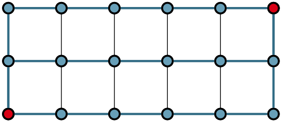




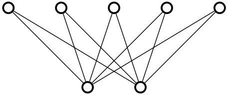


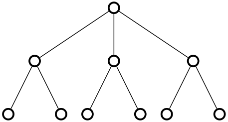


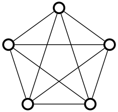
Nombre géodésique



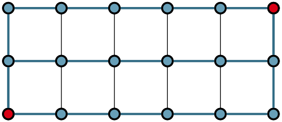
$$\mathrm{g}(P_n \,\square\, P_m) = 2$$



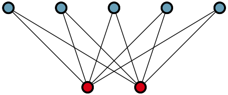




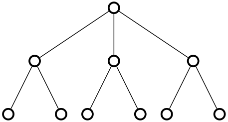
Nombre géodésique

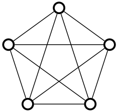


$\mathrm{g}(P_n \,\square\, P_m) = 2$

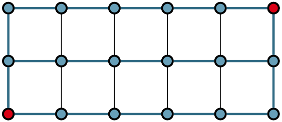


$\mathrm{g}(K_{2,n}) = 2$

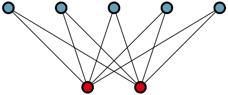




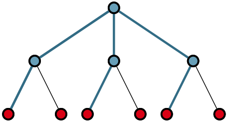
Nombre géodésique



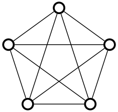
$g(P_n \square P_m) = 2$



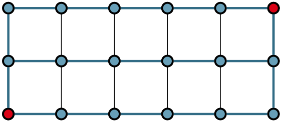
$g(K_{2,n}) = 2$



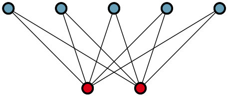
$g(T) = \ell(T)$



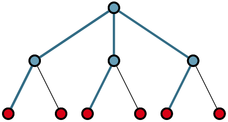
Nombre géodésique



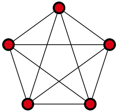
$g(P_n \square P_m) = 2$



$g(K_{2,n}) = 2$



$g(T) = \ell(T)$



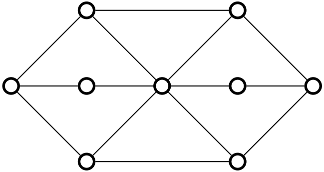
$g(K_n) = n$

Nombre géodésique fort

Manuel *et al.*, 2018+

Ensemble géodésique fort

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$.
S est un ensemble géodésique fort de G si on peut choisir un plus court chemin entre chaque paire de sommets de S de telle sorte qu'ils couvrent tous les sommets de G.

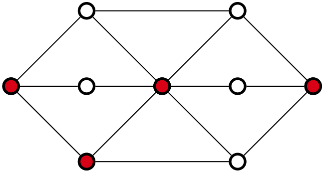


Nombre géodésique fort

Manuel *et al.*, 2018+

Ensemble géodésique fort

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$.
S est un ensemble géodésique fort de G si on peut choisir un plus court chemin entre chaque paire de sommets de S de telle sorte qu'ils couvrent tous les sommets de G.

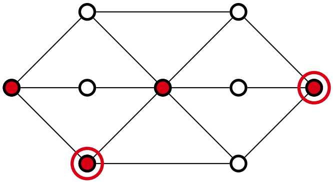


Nombre géodésique fort

Manuel *et al.*, 2018+

Ensemble géodésique fort

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$.
S est un ensemble géodésique fort de G si on peut choisir un plus court chemin entre chaque paire de sommets de S de telle sorte qu'ils couvrent tous les sommets de G.

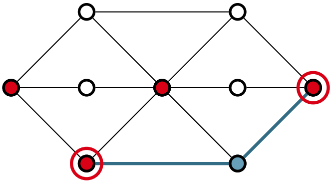


Nombre géodésique fort

Manuel *et al.*, 2018+

Ensemble géodésique fort

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$.
S est un ensemble géodésique fort de G si on peut choisir un plus court chemin entre chaque paire de sommets de S de telle sorte qu'ils couvrent tous les sommets de G.

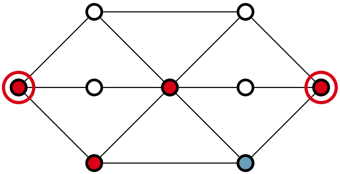


Nombre géodésique fort

Manuel *et al.*, 2018+

Ensemble géodésique fort

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$.
S est un ensemble géodésique fort de G si on peut choisir un plus court chemin entre chaque paire de sommets de S de telle sorte qu'ils couvrent tous les sommets de G.

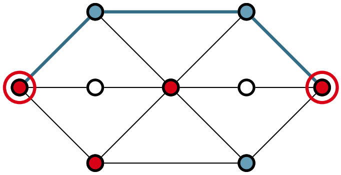


Nombre géodésique fort

Manuel *et al.*, 2018+

Ensemble géodésique fort

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$.
S est un ensemble géodésique fort de G si on peut choisir un plus court chemin entre chaque paire de sommets de S de telle sorte qu'ils couvrent tous les sommets de G.

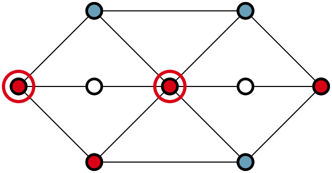


Nombre géodésique fort

Manuel *et al.*, 2018+

Ensemble géodésique fort

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$.
S est un ensemble géodésique fort de G si on peut choisir un plus court chemin entre chaque paire de sommets de S de telle sorte qu'ils couvrent tous les sommets de G.

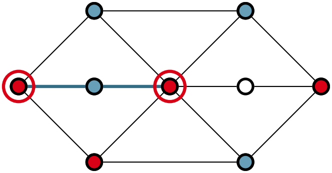


Nombre géodésique fort

Manuel *et al.*, 2018+

Ensemble géodésique fort

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$.
S est un ensemble géodésique fort de G si on peut choisir un plus court chemin entre chaque paire de sommets de S de telle sorte qu'ils couvrent tous les sommets de G.

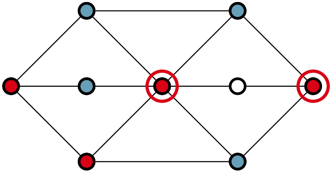


Nombre géodésique fort

Manuel *et al.*, 2018+

Ensemble géodésique fort

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$.
S est un ensemble géodésique fort de G si on peut choisir un plus court chemin entre chaque paire de sommets de S de telle sorte qu'ils couvrent tous les sommets de G.

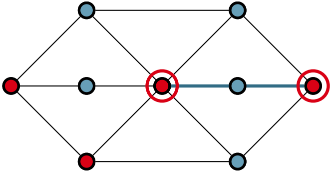


Nombre géodésique fort

Manuel *et al.*, 2018+

Ensemble géodésique fort

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$.
S est un ensemble géodésique fort de G si on peut choisir un plus court chemin entre chaque paire de sommets de S de telle sorte qu'ils couvrent tous les sommets de G.

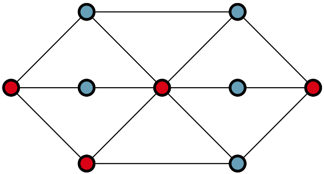


Nombre géodésique fort

Manuel *et al.*, 2018+

Ensemble géodésique fort

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$.
S est un ensemble géodésique fort de G si on peut choisir un plus court chemin entre chaque paire de sommets de S de telle sorte qu'ils couvrent tous les sommets de G.



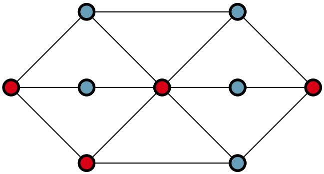
L'objectif est de trouver sg(G), la taille du plus petit ensemble géodésique fort de G

Nombre géodésique fort

Manuel *et al.*, 2018+

Ensemble géodésique fort

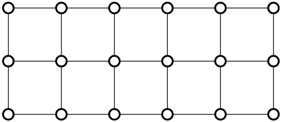
Soit $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$.
S est un ensemble géodésique fort de G si on peut choisir un plus court chemin entre chaque paire de sommets de S de telle sorte qu'ils couvrent tous les sommets de G.



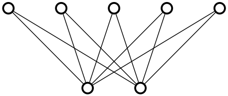
$\mathrm{sg}(G) = 4$

L'objectif est de trouver $\mathrm{sg}(G)$, la taille du plus petit ensemble géodésique fort de G

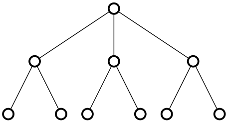
Nombre géodésique fort



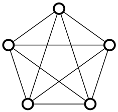
$\mathrm{g}(P_n \,\square\, P_m) = 2$



$\mathrm{g}(K_{2,n}) = 2$

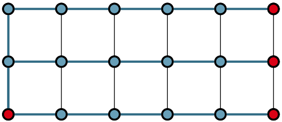


$\mathrm{g}(T) = \ell(T)$



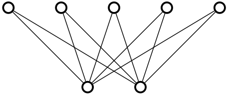
$\mathrm{g}(K_n) = n$

Nombre géodésique fort

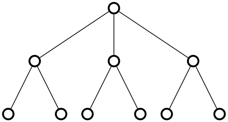


$g(P_n \,\square\, P_m) = 2$

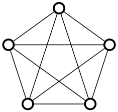
$sg(P_n \,\square\, P_m) \leq n + 1$



$g(K_{2,n}) = 2$

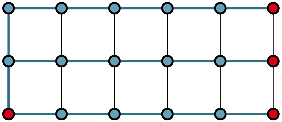


$g(T) = \ell(T)$

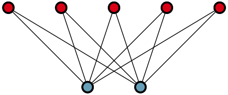


$g(K_n) = n$

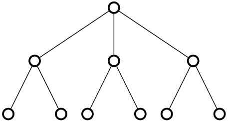
Nombre géodésique fort



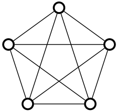
$$\mathrm{g}(P_n \,\square\, P_m) = 2$$
$$\mathrm{sg}(P_n \,\square\, P_m) \leq n + 1$$



$$\mathrm{g}(K_{2,n}) = 2$$
$$\mathrm{sg}(K_{2,n}) = n$$

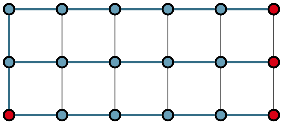


$$\mathrm{g}(T) = \ell(T)$$

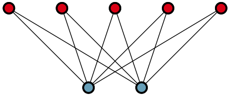


$$\mathrm{g}(K_n) = n$$

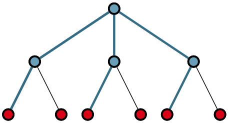
Nombre géodésique fort



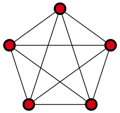
$$g(P_n \,\square\, P_m) = 2$$
$$sg(P_n \,\square\, P_m) \leq n + 1$$



$$g(K_{2,n}) = 2$$
$$sg(K_{2,n}) = n$$



$$g(T) = \ell(T)$$
$$sg(T) = \ell(T)$$



$$g(K_n) = n$$
$$sg(K_n) = n$$

Nombre géodésique fort

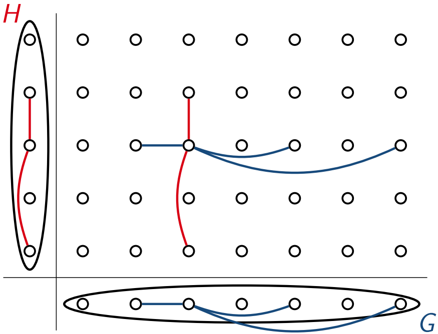
- Introduit dans le contexte des réseaux Apolloniens et prouvé NP-complet.
  - Manuel *et al.* (2018+)
- Etudié dans les grilles et les cylindres
  - Klavžar et Manuel (2018)
- Etudié plus généralement pour les produits cartésiens
  - Iršič et Klavžar (2018)
  - Gledel, Iršič et Klavžar (2018+)
- Aussi étudié pour les graphes bipartis et multipartis
  - Iršič (2018)
  - Iršič et Konvalinka (2018+)
  - Gledel et Iršič (2018+)

Plan

Produit cartésien

Soit $G = (V_G, E_G)$ et $H = (V_H, E_H)$ deux graphes. Leur produit cartésien est $G \,\square\, H$:

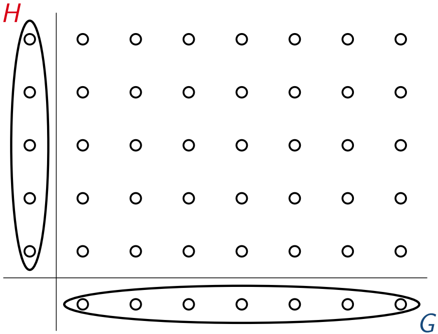
- Son ensemble de sommets est $V_G \times V_H$
- $(g, h)(g', h')$ est une arête
  - si $h = h'$ et $gg' \in E_G$
  - si $g = g'$ et $hh' \in E_H$



Borne basse du nombre géodésique d'un produit cartésien

Théorème (Jiang, Pelayo et Pritikin, 2004)

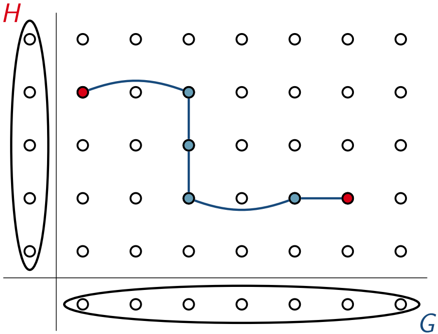
Soit G et H deux graphes,
$\max\{g(G), g(H)\} \leq g(G \,\square\, H) \leq (g(G) - 1)\, g(H)$



Borne basse du nombre géodésique d'un produit cartésien

Théorème (Jiang, Pelayo et Pritikin, 2004)

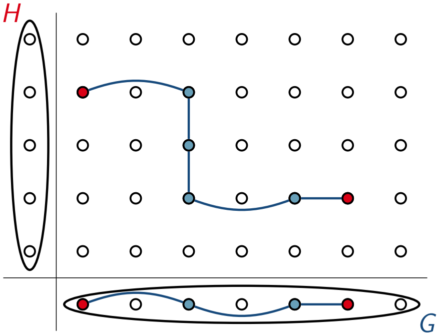
Soit G et H deux graphes,
$\max\{\mathrm{g}(G), \mathrm{g}(H)\} \leq \mathrm{g}(G \,\Box\, H) \leq (\mathrm{g}(G) - 1)\,\mathrm{g}(H)$



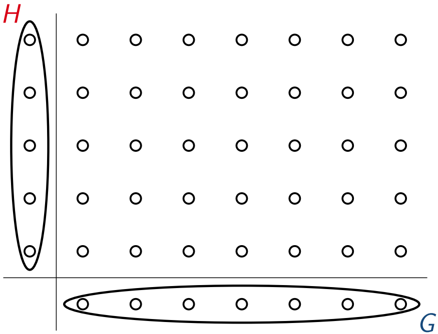
Borne basse du nombre géodésique d'un produit cartésien

Théorème (Jiang, Pelayo et Pritikin, 2004)

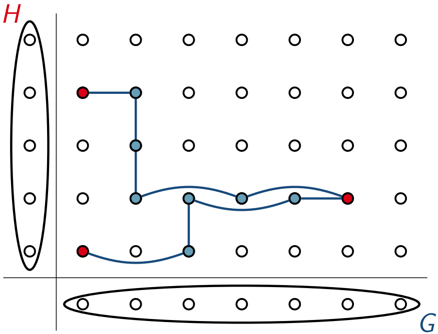
Soit G et H deux graphes,
$\max\{\mathrm{g}(G), \mathrm{g}(H)\} \leq \mathrm{g}(G \,\square\, H) \leq (\mathrm{g}(G) - 1)\,\mathrm{g}(H)$



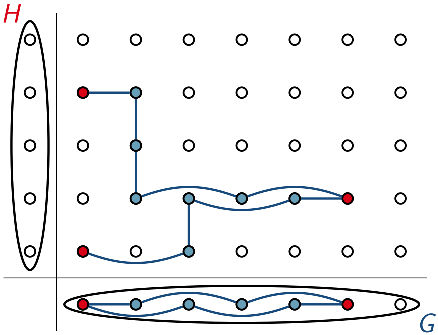
Conjecture pour le nombre géodésique fort



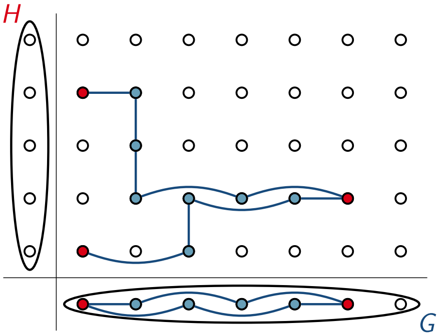
Conjecture pour le nombre géodésique fort



Conjecture pour le nombre géodésique fort



Conjecture pour le nombre géodésique fort

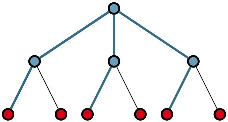


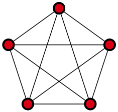
Conjecture (Iršič et Klavžar,2018)

Soit G un graphe, $\mathrm{sg}(G \,\square\, K_2) \geq \mathrm{sg}(G)$

Graphes pour lesquels $\mathrm{sg}(G \,\square\, H) \geq \mathrm{sg}(G)$

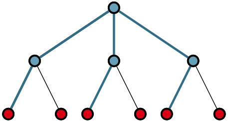
Graphes G géodésiques.

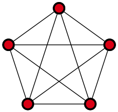




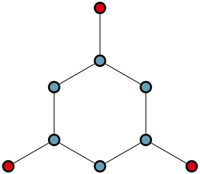
Graphes pour lesquels $\mathrm{sg}(G \,\square\, H) \geq \mathrm{sg}(G)$

Graphes G géodésiques.





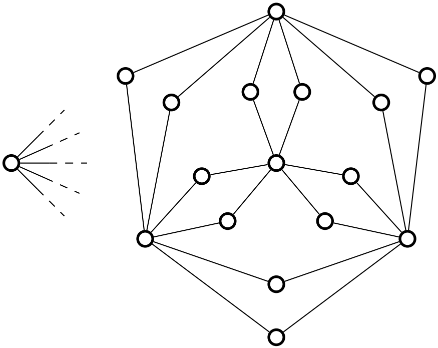
Graphes G tels que $\mathrm{sg}(G) = \mathrm{g}(G)$.



Contre-exemple

Conjecture (Iršič et Klavžar, 2018)

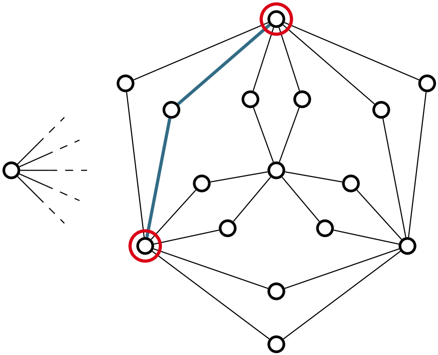
~~Soit G un graphe, $\mathrm{sg}(G \,\square\, K_2) \geq \mathrm{sg}(G)$~~



Contre-exemple

Conjecture (Iršič et Klavžar, 2018)

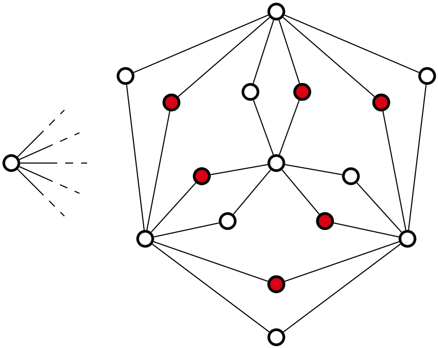
~~Soit G un graphe, $\mathrm{sg}(G \,\square\, K_2) \geq \mathrm{sg}(G)$~~



Contre-exemple

Conjecture (Iršič et Klavžar, 2018)

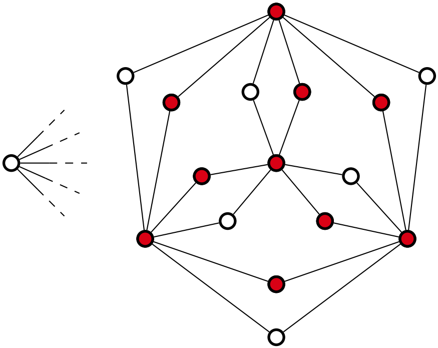
~~Soit G un graphe, $\mathrm{sg}(G \,\square\, K_2) \geq \mathrm{sg}(G)$~~



Contre-exemple

Conjecture (Iršič et Klavžar, 2018)

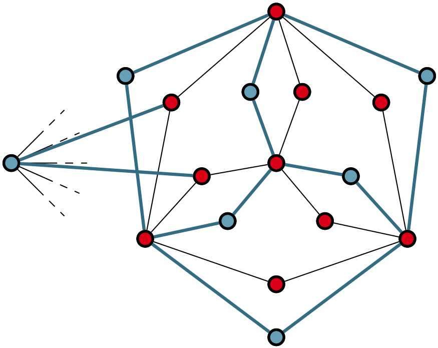
~~Soit G un graphe, $\mathrm{sg}(G \,\Box\, K_2) \geq \mathrm{sg}(G)$~~



Contre-exemple

Conjecture (Iršič et Klavžar, 2018)

~~Soit G un graphe, $\mathrm{sg}(G \,\square\, K_2) \geq \mathrm{sg}(G)$~~

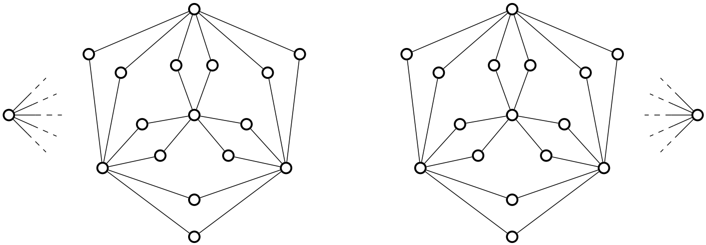


$\mathrm{sg}(G) = 10$

Contre-exemple

Conjecture (Iršič et Klavžar, 2018)

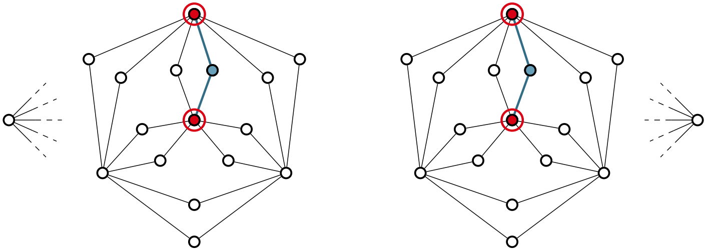
~~Soit G un graphe, $\mathrm{sg}(G \,\square\, K_2) \geq \mathrm{sg}(G)$~~



Contre-exemple

Conjecture (Iršič et Klavžar, 2018)

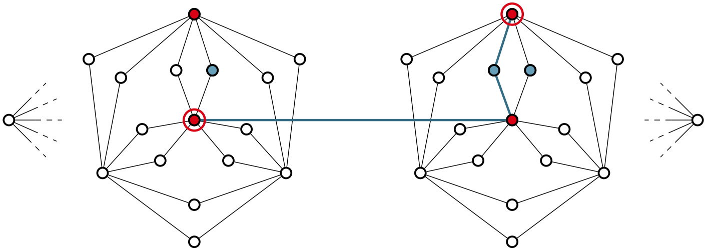
~~Soit G un graphe, $\mathrm{sg}(G \,\square\, K_2) \geq \mathrm{sg}(G)$~~



Contre-exemple

Conjecture (Iršič et Klavžar, 2018)

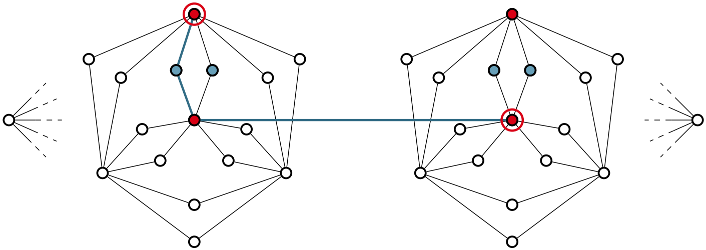
~~Soit G un graphe, $\mathrm{sg}(G \,\square\, K_2) \geq \mathrm{sg}(G)$~~



Contre-exemple

Conjecture (Iršič et Klavžar, 2018)

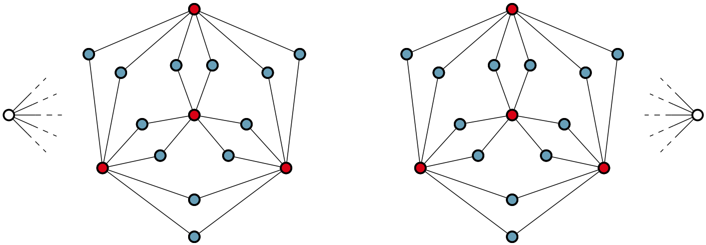
~~Soit G un graphe, $\mathrm{sg}(G \,\square\, K_2) \geq \mathrm{sg}(G)$~~



Contre-exemple

Conjecture (Iršič et Klavžar, 2018)

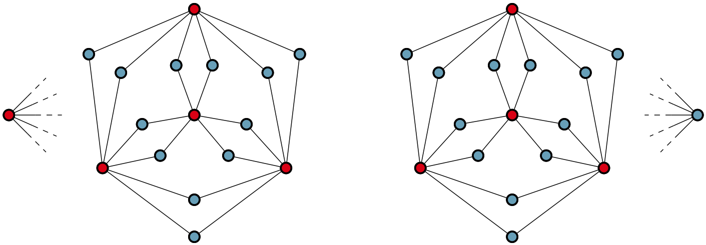
~~Soit G un graphe, $\mathrm{sg}(G \,\square\, K_2) \geq \mathrm{sg}(G)$~~



Contre-exemple

Conjecture (Iršič et Klavžar, 2018)

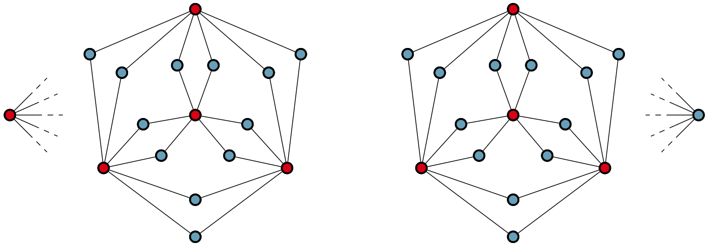
~~Soit G un graphe, $\mathrm{sg}(G \,\square\, K_2) \geq \mathrm{sg}(G)$~~



Contre-exemple

Conjecture (Iršič et Klavžar, 2018)

~~Soit G un graphe, $\mathrm{sg}(G \,\square\, K_2) \geq \mathrm{sg}(G)$~~



$$\mathrm{sg}(G \,\square\, K_2) = 9$$

Borne haute

Théorème (Jiang, Pelayo et Pritikin, 2004)

Soit G et H deux graphes avec $\mathrm{g}(G) \geq \mathrm{g}(H)$,

$$\mathrm{g}(G \square H) \leq (\mathrm{g}(G) - 1)\,\mathrm{g}(H)$$

Théorème

Soit G et H deux graphes,

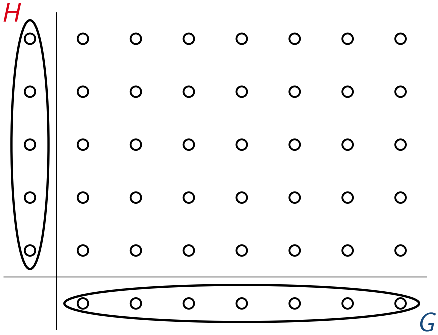
$$\mathrm{sg}(G \square H) \leq (\mathrm{sg}(G) - 1)|V_H| + 1$$

Borne haute

Théorème

Soit G et H deux graphes,

$$\mathrm{sg}(G \,\square\, H) \leq (\mathrm{sg}(G) - 1)|V_H| + 1$$

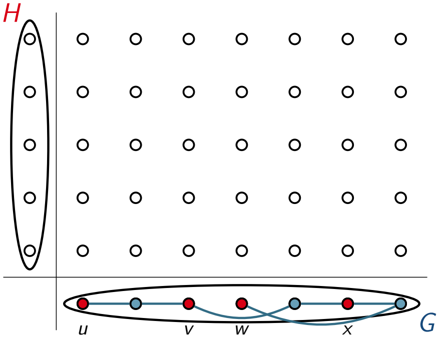


Borne haute

Théorème

Soit G et H deux graphes,

$$\mathrm{sg}(G \,\square\, H) \leq (\mathrm{sg}(G) - 1)|V_H| + 1$$

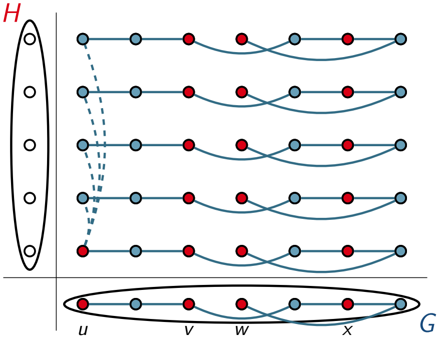


Borne haute

Théorème

Soit G et H deux graphes,

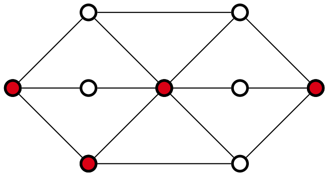
$$\mathrm{sg}(G \,\square\, H) \leq (\mathrm{sg}(G) - 1)|V_H| + 1$$



Noyau géodésique fort

Noyau géodésique fort

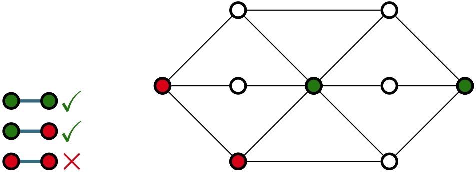
Soit $G = (V, E)$ un graphe, S un ensemble géodésique fort de G et $C \subset S$. C est un noyau géodésique fort de S si on peut en plus fixer des plus courts chemins entre des sommets de C et des sommets de S de telle sorte que ces chemins couvrent tous les sommets de G.



Noyau géodésique fort

Noyau géodésique fort

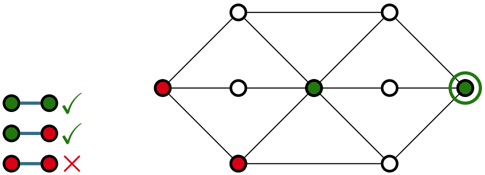
Soit $G = (V, E)$ un graphe, S un ensemble géodésique fort de G et $C \subset S$. C est un noyau géodésique fort de S si on peut en plus fixer des plus courts chemins entre des sommets de C et des sommets de S de telle sorte que ces chemins couvrent tous les sommets de G.



Noyau géodésique fort

Noyau géodésique fort

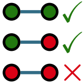
Soit $G = (V, E)$ un graphe, S un ensemble géodésique fort de G et $C \subset S$. C est un noyau géodésique fort de S si on peut en plus fixer des plus courts chemins entre des sommets de C et des sommets de S de telle sorte que ces chemins couvrent tous les sommets de G.

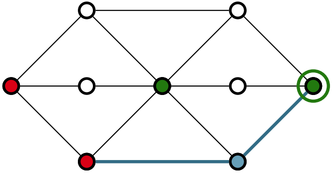


Noyau géodésique fort

Noyau géodésique fort

Soit $G = (V, E)$ un graphe, S un ensemble géodésique fort de G et $C \subset S$. C est un noyau géodésique fort de S si on peut en plus fixer des plus courts chemins entre des sommets de C et des sommets de S de telle sorte que ces chemins couvrent tous les sommets de G.

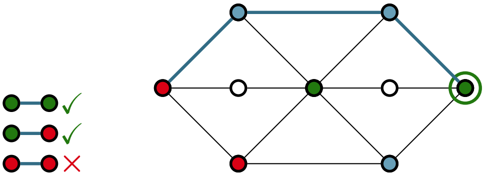




Noyau géodésique fort

Noyau géodésique fort

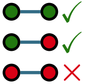
Soit $G = (V, E)$ un graphe, S un ensemble géodésique fort de G et $C \subset S$. C est un noyau géodésique fort de S si on peut en plus fixer des plus courts chemins entre des sommets de C et des sommets de S de telle sorte que ces chemins couvrent tous les sommets de G.

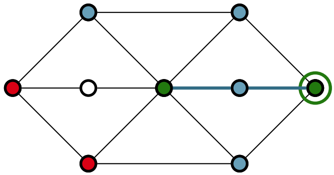


Noyau géodésique fort

Noyau géodésique fort

Soit $G = (V, E)$ un graphe, S un ensemble géodésique fort de G et $C \subset S$. C est un noyau géodésique fort de S si on peut en plus fixer des plus courts chemins entre des sommets de C et des sommets de S de telle sorte que ces chemins couvrent tous les sommets de G.

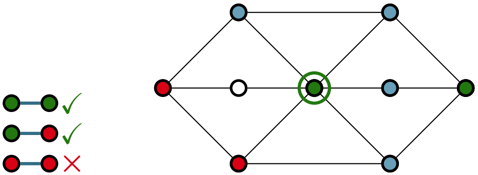




Noyau géodésique fort

Noyau géodésique fort

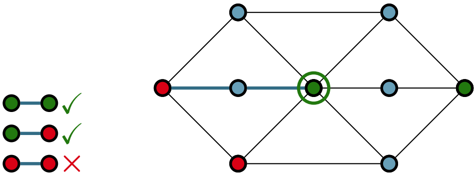
Soit $G = (V, E)$ un graphe, S un ensemble géodésique fort de G et $C \subset S$. C est un noyau géodésique fort de S si on peut en plus fixer des plus courts chemins entre des sommets de C et des sommets de S de telle sorte que ces chemins couvrent tous les sommets de G.



Noyau géodésique fort

Noyau géodésique fort

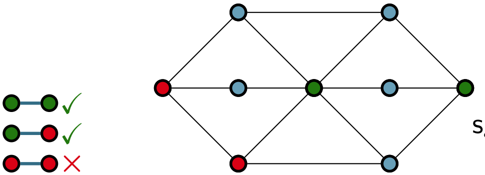
Soit $G = (V, E)$ un graphe, S un ensemble géodésique fort de G et $C \subset S$. C est un noyau géodésique fort de S si on peut en plus fixer des plus courts chemins entre des sommets de C et des sommets de S de telle sorte que ces chemins couvrent tous les sommets de G.



Noyau géodésique fort

Noyau géodésique fort

Soit $G = (V, E)$ un graphe, S un ensemble géodésique fort de G et $C \subset S$. C est un noyau géodésique fort de S si on peut en plus fixer des plus courts chemins entre des sommets de C et des sommets de S de telle sorte que ces chemins couvrent tous les sommets de G.



$\mathrm{sgc}(G) = 2$

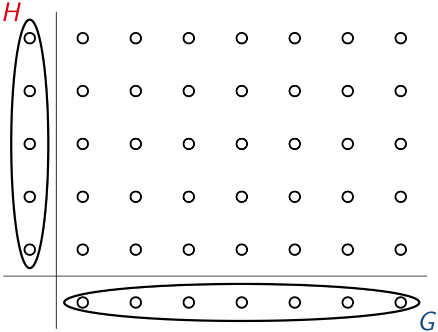
La taille du plus petit noyau géodésique fort des ensembles géodésiques de taille minimale est notée $\mathrm{sgc}(G)$.

Nouvelle borne haute

On avait : $\mathrm{sg}(G \,\square\, H) \leq \mathrm{sg}(G)(|V_H| - 1) + \mathrm{sg}(G)$

Théorème

Soit G et H deux graphes,
$\mathrm{sg}(G \,\square\, H) \leq \mathrm{sgc}(G)(|V_H| - 1) + \mathrm{sg}(G)$

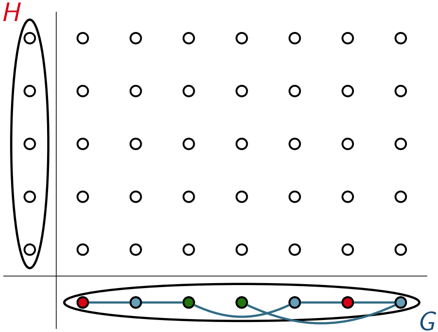


Nouvelle borne haute

On avait : $\mathrm{sg}(G \,\square\, H) \leq \mathrm{sg}(G)(|V_H| - 1) + \mathrm{sg}(G)$

Théorème

Soit G et H deux graphes,
$\mathrm{sg}(G \,\square\, H) \leq \mathrm{sgc}(G)(|V_H| - 1) + \mathrm{sg}(G)$

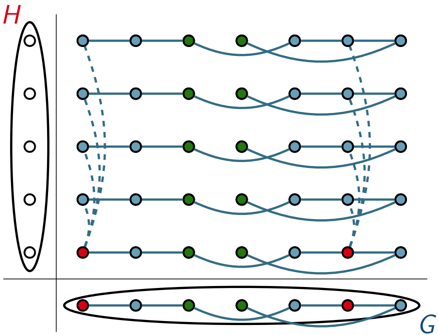


Nouvelle borne haute

On avait : $\mathrm{sg}(G \,\square\, H) \leq \mathrm{sg}(G)(|V_H| - 1) + \mathrm{sg}(G)$

Théorème

Soit G et H deux graphes,
$\mathrm{sg}(G \,\square\, H) \leq \mathrm{sgc}(G)(|V_H| - 1) + \mathrm{sg}(G)$

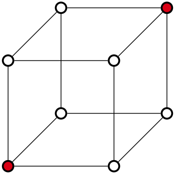


Produits cartésiens particuliers : Les hypercubes

Hypercubes Q_n

- $Q_1 = K_2$
- $Q_{n+1} = Q_n \,\square\, K_2$

On peut aisément montrer que $\mathrm{g}(Q_n) = 2$.

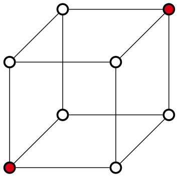


Produits cartésiens particuliers : Les hypercubes

Hypercubes Q_n

- $Q_1 = K_2$
- $Q_{n+1} = Q_n \,\square\, K_2$

On peut aisément montrer que $\mathrm{g}(Q_n) = 2$.



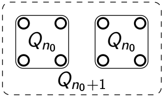
Théorème

$\mathrm{sg}(Q_n) \leq 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$

Produits cartésiens particuliers : Les hypercubes

Lemme

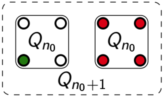
Pour tout $n_0, k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{sg}(Q_{n_0+k}) \leq 2^{n_0} + 2^{k-1}$



Produits cartésiens particuliers : Les hypercubes

Lemme

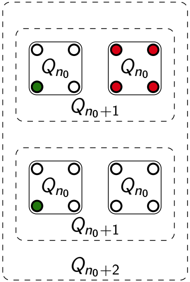
Pour tout $n_0, k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{sg}(Q_{n_0+k}) \leq 2^{n_0} + 2^{k-1}$



Produits cartésiens particuliers : Les hypercubes

Lemme

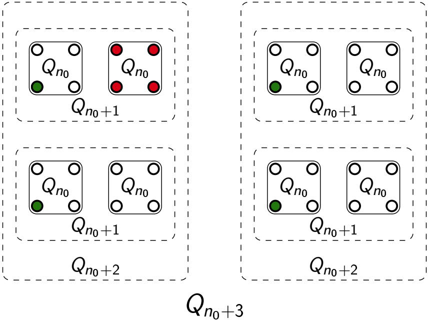
Pour tout $n_0, k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{sg}(Q_{n_0+k}) \leq 2^{n_0} + 2^{k-1}$



Produits cartésiens particuliers : Les hypercubes

Lemme

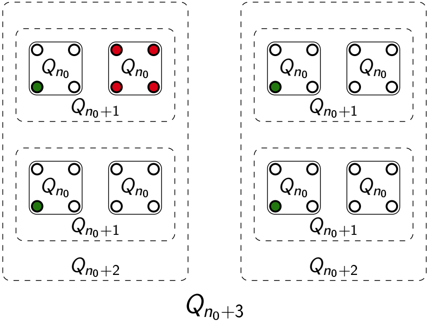
Pour tout $n_0, k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{sg}(Q_{n_0+k}) \leq 2^{n_0} + 2^{k-1}$



Produits cartésiens particuliers : Les hypercubes

Lemme

Pour tout $n_0, k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{sg}(Q_{n_0+k}) \leq 2^{n_0} + 2^{k-1}$



$$\mathrm{sg}(Q_n) = \mathrm{sg}(Q_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil}) \leq 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$$

Autres résultats

- Etude des valeurs que $\mathrm{sgc}(G)$ peut atteindre en fonction de $\mathrm{sg}(G)$
- Etude de cas d'égalité quand on a $\mathrm{sg}(G \,\square\, H) \geq \max\{\mathrm{sg}(G), \mathrm{sg}(H)\}$
  - Egalité lorsque G est un arbre ou une clique et que $2|V_H| \leq \mathrm{sg}(G)$
  - Inégalité stricte lorsque $\mathrm{sgc}(G)$ est grand et que H admet une 2-partition convexe
- Borne sur le nombre géodésique du produit cartésien en fonction du noyau géodésique.

Perspectives

- Trouver une borne basse pour le produit cartésien
- Trouver la complexité du nombre de noyau géodésique fort
- Application du noyau à d'autres situations
- Caractériser les graphes qui ont un unique ensemble géodésique fort minimal

Perspectives

- Trouver une borne basse pour le produit cartésien
- Trouver la complexité du nombre de noyau géodésique fort
- Application du noyau à d'autres situations
- Caractériser les graphes qui ont un unique ensemble géodésique fort minimal